

Plk. ing. Vladimír Vahala, CSc.

Ing. Milan Burša, DrSc.

Pplk. ing. Stanislav Kvasnička, CSc.

**Využití pozorování umělých družic Země ke zpřesnění  
tvaru Země a parametrů jejího gravitačního pole**  
(v ruském znění: „Использование спутниковых наблюдений для  
уточнения фигуры Земли и параметров её гравитационного поля“)

Введение

Искусственные спутники небесных тел уже стали основным средством определения фигур небесных тел и их внешних гравитационных полей.

За короткий срок всего десяти - пятнадцати лет, в течение которого анализируется динамика орбит искусственных спутников, были значительно уточнены основные параметры гравитационных полей и фигур Земли, Луны и Марса.

Мы здесь кратко изложим лишь некоторые результаты исследований, проводимых у нас, и только по полю и фигуре одной лишь Земли.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО МАСШТАБНОГО ФАКТОРА

Совокупность Стоксовых постоянных Земли  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$  степени  $n$  и порядка  $k$  вместе с геоцентрической постоянной  $fM$  определяют внешнее гравитационное поле Земли, сглаженное соответственно максимальной степени  $n$  этой совокупности. Геоцентрическая постоянная имеет размерность  $[м^3 сек^{-2}]$  и линейный масштаб поля следует определить дополнительно, по наземным наблюдениям.

Это можно сделать по-разному. Мы для этой цели воспользовались геоцентрическими координатами  $x, y, z$  и их высотами

И над уровнем моря 104 спутниковых станций, включенных в систему обработки [10]. По этим данным мы вычислили геопотенциал  $W_0$ , соответствующий сглаженному геоиду регуляризированной Земли

$$\begin{aligned}
 (1) \quad W_0 = & \frac{fM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - H} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{23} \left( \frac{a_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - H} \right)^n J_n^{(0)} P_n^{(0)}(\sin\phi) + \right. \\
 & + \sum_{n=2}^{18} \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - H} \right)^n (J_n^{(k)} \cos k\lambda + \\
 & + S_n^{(k)} \sin k\lambda) P_n^{(k)}(\sin\phi) + \\
 & \left. + \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - H} \right)^3 q [1 - P_2^{(0)}(\sin\phi)] \right\}, \\
 q = & \frac{a_0^3 \omega^2}{fM};
 \end{aligned}$$

$a_0$  - произвольная линейная постоянная ;

$\phi, \lambda$  - геоцентрическая широта и долгота спутниковой станции ;

$\omega$  - Угловая скорость вращения Земли .

Если принять

$$fM = 398\,601,3 \cdot 10^9 \text{ м}^3 \text{ сек}^{-2},$$

то

$$(2) \quad W_0 = (62\,636,988 \pm 0,13) \cdot 10^3 \text{ м}^2 \text{ сек}^{-2}.$$

Эта величина дает возможность ввести линейный масштабный фактор поля

$$(3) \quad R_0 = \frac{fM}{W_0} = (6\,363\,672,9 \pm 1,4) \text{ м},$$

который уже не зависит явно от выбора геоцентрической постоянной  $fM$ , а лишь косвенно через геоцентрические координаты спутниковых станций, полученные из анализа динамики орбит ИСЗ.

Кстати, имея (2), можно вычислить разность потенциалов

$$(4) \quad W_0 - U_0 = \delta W_0,$$

т.е. разность относительно потенциала  $U_0$  нормальной Земли. Отметим, что эта разность зависит от геоцентрической постоянной. Она дана в таблице 1 для трех в настоящее время применяемых систем нормального поля  $\gamma$ : I (Гельмерта 1901-9), II (Кассиниса 1930), III (IAG 1967).

Величина

$$(5) \quad \frac{W_0 - U_0}{\gamma} = \delta \zeta_0$$

дает возможность трансформировать высоты геоида  $\zeta$ , полученные по возмущающему потенциалу в разных нормальных системах.

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИПСОИДОВ И ТРАНСФОРМИРОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОТНОСИМОСТИ

Имея линейный масштабный фактор (3), можно уже вычислить величины в линейной мере, в их числе и радиус-вектор  $\rho_{W_0}$  уровневой поверхности  $W = W_0$ .



Таблица 1

fM	W <sub>o</sub> - U <sub>o</sub>			δξ <sub>o</sub>		
	Система I	Система II	Система III	I	II	III
[10 <sup>9</sup> м <sup>3</sup> сек <sup>-2</sup> ]	[м <sup>2</sup> сек <sup>-2</sup> ]	[м <sup>2</sup> сек <sup>-2</sup> ]	[м <sup>2</sup> сек <sup>-2</sup> ]	[м]	[м]	[м]
398 600,0	69	-414	- 12	7	-42	- 1
1	77	-405	- 4	8	-41	- 0
2	86	-397	4	9	-41	0
3	92	-390	12	9	-40	1
4	101	-382	20	10	-39	2
5	109	-374	28	11	-38	3
6	117	-366	36	12	-37	4
7	124	-359	43	13	-37	4
8	132	-350	51	13	-36	5
9	140	-342	59	14	-35	6
1,0	147	-335	67	15	-34	7
1	156	-327	75	16	-33	8
2	164	-319	83	17	-33	8
3	172	-311	91	18	-32	9
4	179	-304	98	18	-31	10
5	187	-295	106	19	-30	11
6	195	-287	114	20	-29	12
7	202	-280	122	21	-29	12
8	211	-272	130	22	-28	13
9	219	-264	138	22	-27	14
2,0	227	-256	146	23	-26	15
5	266	-217	185	27	-22	19
3,0	305	-177	224	31	-18	23

Радиус-вектор этой же поверхности можно было бы вычислить и в геодезической референц-системе по относительным высотам геоида  $\zeta_r$ , если знать координаты  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$  центра геодезического референц-эллипсоида  $(a, e^2)$  относительно центра масс Земли. Обозначим  $\rho_r$  значение радиуса-вектора, как оно получится без учета элементов  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$ . Тогда разность  $(\rho_{W_0} - \rho_r)$  и есть функцией именно этих элементов и может в свою очередь служить и для определения последних. Уравнения поправок будут иметь вид

$$(6) \quad v = \cos B \cos L \Delta x_0 + \cos B \sin L \Delta y_0 + \sin B \Delta z_0 - (\rho_{W_0} - \rho_r),$$

$$(7) \quad \rho_{W_0} - \rho_r = R_0 \left[ 1 + A_0^{(0)} + \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n (A_n^{(k)} \cos k\lambda + B_n^{(k)} \sin k\lambda) P_n^{(k)}(\sin\phi) \right] - \rho_r =$$

$$= R_0 \left[ 1 + A_0^{(0)} + \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n A_{n,k} \cos k(\lambda - \lambda_{n,k}) P_n^{(k)}(\sin\phi) \right] -$$

$$- \left\{ (N + \zeta_r)^2 \cos^2 B + [N(1-e^2) + \zeta_r]^2 \sin^2 B \right\}^{1/2};$$

$P_n^{(k)}(\sin\phi)$  - полиномы Лежандра степени  $n$  и порядка  $k$  ;

$B, L$  - геодезические координаты ;

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}$$

Значения коэффициентов  $A_n^{(0)}$ ,  $A_n^{(k)}$ ,  $B_n^{(k)}$  даны в таблицах 2,3. Штрихом обозначенные величины соответствуют полностью нормированным гармоникам ;

$$A_{n,k} = \sqrt{(A_n^{(k)})^2 + (B_n^{(k)})^2},$$

$$\operatorname{tg} k \Lambda_{n,k} = \frac{B_n^{(k)}}{A_n^{(k)}}.$$

Пользуясь картами высот геоида  $\zeta_r$  в некоторых геодезических системах относимости, были описанным способом и вычислены координаты  $\Delta x_0$ ,  $\Delta y_0$ ,  $\Delta z_0$  референц-эллипсоидов, лежащих в основе этих систем. Они даны в таблице 4. Детальное описание работ и исходные данные приведены в [ 1 - 5 ].

Данные в таблице 4 позволили в свою очередь выполнить трансформирование геодезических координат и относительных высот геоида между отдельными геодезическими референц-системами.



Таблица 2

n	$A_n^{(o)}$	$R_o A_n^{(o)}$
	$[10^{-6}]$	[ м ]
0	1 150,50	7 321,40
2	- 2 241,91	-14 266,80
3	2,56	16,28
4	3,12	19,82
5	0,23	1,47
6	- 0,57	- 3,61
7	0,36	2,27
8	0,21	1,33
9	0,16	1,00
10	0,24	1,54
11	- 0,32	- 2,04
12	0,20	1,25
13	0,35	2,22
14	- 0,11	- 0,69
15	- 0,11	- 0,69
16	- 0,04	- 0,22
17	0,23	1,46
18	0,11	0,67
19	- 0,10	- 0,66
20	0,12	0,80
21	0,09	0,55
22	- 0,10	- 0,62
23	- 0,15	- 0,97

Таблица 3

n	k	$\bar{A}_n^{(k)}$	$R_o \bar{A}_n^{(k)}$	$\bar{B}_n^{(k)}$	$R_o \bar{B}_n^{(k)}$	$\bar{A}_{n,k}$	k $\Delta_{n,k}$	$\Delta_{n,k}$ i = 1, 2, ..., k
		[10 <sup>-6</sup> ]	[м]	[10 <sup>-6</sup> ]	[м]	[м]		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	2,391	15,22	-1,372	-8,73	17,55	330,1°	165,0°+(i-1)180°
3	1	2,012	12,80	0,225	1,43	12,88	6,4	6,4
	2	0,783	4,98	-0,760	-4,84	6,94	315,9	158,0 +(i-1)180
	3	0,493	3,14	1,538	9,79	10,28	72,2	24,1 +(i-1)120
4	1	-0,521	-3,32	-0,485	-3,09	4,54	222,9	222,9
	2	0,346	2,20	0,678	4,31	4,84	62,9	31,4 +(i-1)180
	3	1,048	6,67	-0,120	-0,76	6,71	353,5	117,8 +(i-1)120
	4	-0,106	-0,67	0,360	2,29	2,39	106,4	26,6 +(i-1) 90
5	1	-0,055	-0,35	-0,081	-0,52	0,63	236,0	236,0
	2	0,606	3,86	-0,404	-2,57	4,64	326,3	163,2 +(i-1)180
	3	-0,591	-3,76	-0,165	-1,05	3,90	195,6	65,2 +(i-1)120
	4	-0,117	-0,74	-0,046	-0,29	0,79	201,2	50,3 +(i-1) 90
	5	0,142	0,90	-0,878	-5,59	5,66	279,2	55,8 +(i-1) 72
6	1	-0,073	-0,46	0,018	0,11	0,47	166,0	166,0
	2	0,025	0,16	-0,413	-2,63	2,63	275,5	136,8 +(i-1)180
	3	0,004	0,03	0,029	0,18	0,18	82,2	27,4 +(i-1)120
	4	-0,101	-0,64	-0,307	-1,95	2,05	251,7	62,9 +(i-1) 90
	5	-0,137	-0,87	-0,618	-3,93	4,03	257,5	51,5 +(i-1) 72
	6	-0,029	-0,18	-0,267	-1,70	1,71	263,7	44,0 +(i-1) 60
7	1	0,239	1,52	0,057	0,36	1,56	13,4	13,4
	2	0,207	1,32	0,176	1,12	1,74	40,3	20,2 +(i-1)180
	3	0,224	1,43	-0,352	-2,24	2,66	302,4	100,8 +(i-1)120
	4	-0,290	-1,85	-0,281	-1,79	2,58	224,2	56,0 +(i-1) 90
	5	0,036	0,23	0,088	0,56	0,61	68,1	13,6 +(i-1) 72
	6	-0,279	-1,78	0,087	0,55	1,86	162,6	27,1 +(i-1) 60
	7	-0,025	-0,16	-0,009	-0,06	0,17	199,8	28,5 +(i-1) 51,4



Таблица 3 (Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	1	0,011	0,07	0,049	0,31	0,32	77,1 <sup>0</sup>	77,1 <sup>0</sup>
	2	0,113	0,72	0,106	0,67	0,98	43,2	21,6 + (i-1)180 <sup>0</sup>
	3	-0,091	-0,58	-0,052	-0,33	0,67	209,8	69,9 + (i-1)120
	4	-0,227	-1,44	0,270	1,72	2,24	130,1	32,5 + (i-1) 90
	5	0,156	0,99	0,082	0,52	1,12	27,9	5,6 + (i-1) 72
	6	-0,100	-0,64	0,286	1,82	1,93	109,2	18,2 + (i-1) 60
	7	0,209	1,33	0,251	1,60	2,08	50,2	7,2 + (i-1) 51,4
	8	0,173	1,10	0,095	0,60	1,25	28,7	3,6 + (i-1) 45
9	1	0,185	1,18	0,042	0,27	1,21	12,8	12,8
	2	-0,022	-0,14	0,024	0,15	0,21	132,5	66,2 + (i-1)180
	3	-0,101	-0,64	-0,023	-0,15	0,66	193,1	64,4 + (i-1)120
	4	-0,042	-0,27	-0,040	-0,25	0,37	223,6	55,9 + (i-1) 90
	5	-0,060	-0,38	0,004	0,03	0,38	176,1	35,2 + (i-1) 72
	6	0,050	0,32	0,113	0,72	0,79	66,2	11,0 + (i-1) 60
	7	-0,203	-1,29	-0,153	-0,97	1,61	217,0	31,0 + (i-1) 51,4
	8	0,240	1,53	0,010	0,06	1,53	2,4	0,3 + (i-1) 45
	9	-0,036	-0,23	0,061	0,32	0,39	120,3	13,4 + (i-1) 40
10	1	0,091	0,58	-0,061	-0,39	0,70	326,0	326,0
	2	-0,038	-0,24	-0,065	-0,41	0,48	240,0	120,0 + (i-1)180
	3	-0,136	-0,87	-0,075	-0,48	0,99	208,8	69,6 + (i-1)120
	4	-0,023	-0,15	-0,080	-0,51	0,53	254,3	63,6 + (i-1) 90
	5	-0,006	-0,04	-0,122	-0,78	0,78	267,1	53,4 + (i-1) 72
	6	-0,096	-0,61	-0,012	-0,08	0,62	187,3	31,2 + (i-1) 60
	7	0,189	1,20	0,023	0,15	1,21	6,8	1,0 + (i-1) 51,4
	8	0,001	0,01	0,007	0,04	0,04	81,9	10,2 + (i-1) 45
	9	0,080	0,51	0,006	0,04	0,51	4,4	0,5 + (i-1) 40
	10	0,136	0,87	0,101	0,64	1,08	36,7	3,7 + (i-1) 36
11	1	-0,012	-0,08	0,077	0,49	0,50	99,1	99,1
	2	-0,021	-0,13	-0,065	-0,41	0,43	252,4	126,2 + (i-1)180
	3	-0,001	-0,01	-0,039	-0,25	0,25	268,5	89,5 + (i-1)120
	4	0,016	0,10	-0,201	-1,28	1,28	274,7	68,7 + (i-1) 90
	5	-0,002	-0,01	0,063	0,40	0,40	91,9	18,4 + (i-1) 72
	6	0,066	0,42	-0,027	-0,17	0,45	337,9	56,3 + (i-1) 60
	7	-0,035	-0,22	-0,131	-0,83	0,86	255,1	36,4 + (i-1) 51,4
	8	-0,014	-0,09	0,046	0,29	0,30	107,3	13,4 + (i-1) 45

Таблица 3 (Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	9	0,022	0,14	0,069	0,44	0,46	72,6 <sup>0</sup>	8,1 <sup>0</sup> +(i-1) 40 <sup>0</sup>
	10	0,054	0,34	-0,079	-0,50	0,60	304,5	30,4 +(i-1) 36
	11	0,089	0,57	-0,027	-0,17	0,60	343,4	31,2 +(i-1) 32,7
12	1	-0,059	-0,38	-0,068	-0,43	0,57	229,2	229,2
	2	-0,100	0,64	0,047	0,30	0,71	154,6	77,3 +(i-1)180
	3	0,119	0,76	-0,050	-0,32	0,82	337,1	112,4 +(i-1)120
	4	-0,051	-0,32	0,055	0,35	0,47	132,7	33,2 +(i-1) 90
	5	0,084	0,53	0,029	0,18	0,56	18,8	3,8 +(i-1) 72
	6	-0,022	-0,14	0,037	0,24	0,28	120,2	20,0 +(i-1) 60
	7	0,031	0,20	0,033	0,21	0,29	46,9	6,7 +(i-1) 51,4
	8	0,041	0,26	0,059	0,38	0,46	54,9	6,9 +(i-1) 45
	9	-0,118	-0,75	0,015	0,10	0,76	172,6	19,2 +(i-1) 40
	10	-0,047	-0,30	0,044	0,28	0,41	136,9	13,7 +(i-1) 36
	11	-0,008	-0,05	-0,049	-0,31	0,31	260,5	23,7 +(i-1) 32,7
	12	-0,029	-0,18	-0,017	-0,11	0,21	211,2	17,6 +(i-1) 30
13	1	0,009	0,06	-0,033	-0,21	0,22	285,7	285,7
	2	-0,011	-0,07	-0,094	-0,60	0,60	263,1	131,6 +(i-1)180
	3	-0,033	-0,21	0,050	0,32	0,38	123,2	41,1 +(i-1)120
	4	0,041	0,26	-0,109	-0,69	0,74	290,7	72,7 +(i-1) 90
	5	0,041	0,26	0,039	0,25	0,36	43,5	8,7 +(i-1) 72
	6	-0,023	-0,15	-0,011	-0,07	0,17	206,6	34,4 +(i-1) 60
	7	-0,079	-0,50	0,011	0,07	0,50	171,9	24,6 +(i-1) 51,4
	8	-0,003	-0,02	0,014	0,09	0,09	102,1	12,8 +(i-1) 45
	9	-0,012	-0,08	0,075	0,48	0,49	99,3	11,0 +(i-1) 40
	10	0,004	0,03	0,008	0,05	0,06	63,4	6,3 +(i-1) 36
	11	-0,056	-0,36	0,013	0,08	0,37	166,5	15,1 +(i-1) 32,7
	12	-0,048	-0,31	0,082	0,52	0,61	120,4	10,0 +(i-1) 30
	13	-0,071	-0,45	0,074	0,47	0,65	133,8	10,3 +(i-1) 27,7
14	1	-0,014	-0,09	0,054	0,34	0,35	105,1	105,1
	2	-0,016	-0,10	0,028	0,18	0,21	120,6	60,3 +(i-1)180
	3	0,100	0,64	-0,027	-0,17	0,66	345,0	115,0 +(i-1)120
	4	-0,031	-0,20	-0,004	-0,03	0,20	187,6	46,9 +(i-1) 90
	5	-0,001	-0,01	-0,061	-0,39	0,39	269,0	53,8 +(i-1) 72



Таблица 3 (Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
14	6	-0,014	-0,09	-0,029	-0,18	0,20	243,4 <sup>0</sup>	40,6 <sup>0</sup> +(i-1) 60 <sup>0</sup>
	7	0,073	0,46	0,002	0,01	0,46	1,6	0,2 +(i-1) 51,4
	8	-0,020	-0,13	-0,061	-0,39	0,41	252,2	31,5 +(i-1) 45
	9	-0,025	-0,16	0,070	0,45	0,48	109,4	12,2 +(i-1) 40
	10	0,030	0,19	-0,035	-0,22	0,29	310,5	31,0 +(i-1) 36
	11	0,086	0,55	-0,002	-0,01	0,55	358,6	32,6 +(i-1) 32,7
	12	0,001	0,01	-0,032	-0,20	0,20	271,8	22,6 +(i-1) 30
	13	0,032	0,20	0,050	0,32	0,38	57,2	4,4 +(i-1) 27,7
14	-0,068	-0,43	0,003	0,02	0,43	177,4	12,7 +(i-1) 25,7	
15	1	0,030	0,19	-0,018	-0,11	0,22	329,6	329,6
	2	-0,012	-0,08	-0,071	-0,45	0,46	260,1	130,0 +(i-1)180
	3	-0,061	-0,39	0,047	0,30	0,49	142,7	47,6 +(i-1)120
	4	0,016	0,10	0,007	0,04	0,11	25,0	6,2 +(i-1) 90
	5	0,038	0,24	-0,008	-0,05	0,25	347,8	69,6 +(i-1) 72
	6	0,010	0,06	-0,031	-0,20	0,21	288,4	48,1 +(i-1) 60
	7	0,031	0,20	0,017	0,11	0,23	28,1	4,0 +(i-1) 51,4
	8	-0,071	-0,45	0,063	0,40	0,60	138,5	17,3 +(i-1) 45
	9	-0,047	-0,30	0,058	0,37	0,48	128,8	14,3 +(i-1) 40
	10	0,064	0,41	-0,007	-0,04	0,41	353,6	35,4 +(i-1) 36
	11	-0,047	-0,30	-0,003	-0,02	0,30	183,8	16,7 +(i-1) 32,7
	12	-0,043	-0,27	0,006	0,04	0,27	171,8	14,3 +(i-1) 30
	13	-0,043	-0,27	-0,005	-0,03	0,27	186,8	14,4 +(i-1) 27,7
	14	0,010	0,06	-0,028	-0,18	0,19	290,3	20,7 +(i-1) 25,7
	15	-0,058	-0,37	0,036	0,23	0,44	148,0	9,9 +(i-1) 24
16	1	-0,010	-0,06	0,056	0,36	0,37	100,5	100,5
	2	0,006	0,04	0,051	0,32	0,32	83,0	41,5 +(i-1)180
	3	0,056	0,36	0,005	0,03	0,36	5,3	1,8 +(i-1)120
	4	0,048	0,31	0,037	0,24	0,39	38,1	9,5 +(i-1) 90
	5	-0,025	-0,16	0,031	0,20	0,26	128,6	25,7 +(i-1) 72
	6	-0,004	-0,03	-0,022	-0,14	0,14	259,2	43,2 +(i-1) 60
	7	-0,002	-0,01	0,003	0,02	0,02	123,7	17,7 +(i-1) 51,4
	8	-0,109	-0,69	-0,047	-0,30	0,75	203,2	25,4 +(i-1) 45



Таблица 3 (Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	9	0,026	0,17	-0,089	-0,57	0,59	286,2 <sup>0</sup>	31,8 <sup>0</sup> +(i-1) 40 <sup>0</sup>
	10	-0,041	-0,26	-0,005	-0,03	0,26	187,1	18,7 +(i-1) 36
	11	-0,022	-0,14	0,031	0,20	0,25	125,0	11,4 +(i-1) 32,7
	12	0,017	0,11	-0,013	-0,08	0,14	320,9	26,7 +(i-1) 30
	13	0,026	0,17	0,007	0,04	0,17	15,6	1,2 +(i-1) 27,7
	14	-0,016	-0,10	-0,008	-0,05	0,11	208,1	14,9 +(i-1) 25,7
	15	-0,080	-0,51	-0,027	-0,17	0,54	198,7	13,2 +(i-1) 24
	16	-0,020	-0,13	-0,023	-0,15	0,20	229,2	14,3 +(i-1) 22,5
17	1	0,009	0,06	-0,043	-0,27	0,28	282,4	282,4
	2	-0,009	-0,06	-0,028	-0,18	0,19	251,6	125,8 +(i-1)180
	3	-0,008	-0,05	-0,019	-0,12	0,13	246,1	82,0 +(i-1)120
	4	-0,045	-0,29	0,071	0,45	0,54	122,3	30,6 +(i-1) 90
	5	0,044	0,28	-0,026	-0,17	0,33	329,2	65,0 +(i-1) 72
	6	-0,047	-0,30	-0,018	-0,11	0,32	200,7	33,4 +(i-1) 60
	7	0,018	0,11	-0,035	-0,22	0,25	296,6	42,4 +(i-1) 51,4
	8	0,043	0,27	0,006	0,04	0,27	8,3	1,0 +(i-1) 45
	9	-0,045	-0,29	-0,017	-0,11	0,31	200,4	22,3 +(i-1) 40
	10	-0,011	-0,07	0,058	0,37	0,38	101,1	10,1 +(i-1) 36
	11	-0,046	-0,29	-0,004	-0,03	0,29	185,2	16,8 +(i-1) 32,7
	12	0,033	0,21	0,006	0,04	0,21	10,6	0,9 +(i-1) 30
	13	0,026	0,17	0,010	0,06	0,18	21,8	1,7 +(i-1) 27,7
	14	-0,006	-0,04	0,007	0,04	0,06	130,4	9,3 +(i-1) 25,7
	15	0,051	0,32	0,033	0,21	0,38	33,2	2,2 +(i-1) 24
	16	-0,025	-0,16	-0,017	-0,11	0,19	213,7	13,4 +(i-1) 22,5
	17	-0,094	-0,60	-0,009	-0,06	0,60	185,7	10,9 +(i-1) 21,2
18	1	-0,025	-0,16	-0,078	-0,50	0,53	252,2	252,2
	2	-0,009	-0,06	0,031	0,20	0,21	106,7	53,4 +(i-1)180
	3	-0,036	-0,23	-0,023	-0,15	0,28	212,2	70,7 +(i-1)120
	4	0,030	0,19	-0,047	-0,30	0,36	302,8	75,7 +(i-1) 90
	5	0,002	0,01	-0,006	-0,04	0,04	288,4	57,7 +(i-1) 72
	6	0,025	0,16	-0,004	-0,03	0,16	350,5	58,4 +(i-1) 60
	7	-0,001	-0,01	-0,008	-0,05	0,05	262,9	37,6 +(i-1) 51,4

Таблица 3 (Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
18	8	0,056	0,36	-0,023	-0,15	0,39	337,8 <sup>0</sup>	42,2 <sup>0</sup> +(i-1) 45 <sup>0</sup>
	9	0,000	0,00	-0,006	-0,04	0,04	0,0	40,0 +(i-1) 40
	10	0,044	0,28	0,008	0,05	0,28	10,8	1,1 +(i-1) 36
	11	0,026	0,17	0,024	0,15	0,23	42,6	3,9 +(i-1) 32,7
	12	-0,006	-0,04	0,007	0,04	0,06	130,6	10,9 +(i-1) 30
	13	-0,028	-0,18	-0,045	-0,29	0,34	237,9	18,3 +(i-1) 27,7
	14	0,009	0,06	-0,034	-0,22	0,23	285,3	20,4 +(i-1) 25,7
	15	-0,044	-0,28	-0,028	-0,18	0,33	212,7	14,2 +(i-1) 24
	16	0,026	0,17	-0,005	-0,03	0,17	348,7	21,8 +(i-1) 22,5
	17	0,036	0,23	-0,049	-0,31	0,39	306,7	18,0 +(i-1) 21,2
	18	-0,000	0,00	0,053	0,34	0,34	180,0	10,0 +(i-1) 20,0

Таблица 4. Параметры применяемых геодезических референц-систем

Обозначение	Референц-эллипсоид			Координаты центра референц-эллипсоида относительно центра масс Земли		
	название	параметры		$\Delta x_0$ [м]	$\Delta y_0$ [м]	$\Delta z_0$ [м]
		а	1 : $\alpha$			
Европейская (EUR)	Хейфорда	6 378 388	297,00	- 82,7 $\pm$ 1,7	-113,2 $\pm$ 2,4	-112,6 $\pm$ 1,8
Североамериканская (NAD)	Кларка 1866 г.	6 378 206	294,98	- 11,2 $\pm$ 2,0	156,3 $\pm$ 1,1	189,0 $\pm$ 1,1
Австралийская (AND)	Австралийский национальный	6 378 160	298,25	-108,8 $\pm$ 1,8	- 56,4 $\pm$ 2,0	93,2 $\pm$ 2,5
Индийская (IND)	Звереста	6 377 276	300,80	114,8 $\pm$ 9,0	819,1 $\pm$ 4,6	100,0 $\pm$ 12,3
Центрально Китайская (ШНД)	Хейфорда	6 378 388	297,00	- 48,3 $\pm$ 2,1	-319,4 $\pm$ 1,1	- 5,9 $\pm$ 2,4



3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОПРАВКИ ПОТСДАМСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И ПАРАМЕТРОВ ВНЕШНЕГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Ускорение силы тяжести во внешней точке с геоцентрическими координатами  $\rho$ ,  $\phi$ ,  $\Lambda$  можно представить рядом

$$(8) \quad g = \frac{fM}{\rho^2} \left[ c_0^{(0)} + \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n (C_n^{(k)} \cos k\Lambda + D_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin\phi) \right],$$

коэффициенты в котором являются функциями Стоксовых постоянных и параметра  $q$  и равны

$$(9) \quad c_0^{(0)} = 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-3} q + \frac{3}{5} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^4 (J_2^{(0)})^2 + \frac{1}{15} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-6} q^2 - \\ - \frac{2}{5} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-1} J_2^{(0)} q + \frac{4}{105} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-9} q^3 - \frac{9}{35} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-4} J_2^{(0)} q^2,$$

$$c_2^{(0)} = \frac{2}{3} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-3} q + 3 \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^2 J_2^{(0)} + \frac{3}{7} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^4 (J_2^{(0)})^2 + \\ + \frac{1}{21} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-6} q^2 - \frac{2}{7} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-1} J_2^{(0)} q - \frac{1}{7} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-4} J_2^{(0)} q^2,$$

$$c_4^{(0)} = 5 \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^4 J_4^{(0)} - \frac{36}{35} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^4 (J_2^{(0)})^2 - \frac{4}{35} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-6} q^2 + \\ + \frac{24}{35} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-1} J_2^{(0)} q + \frac{174}{385} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-4} J_2^{(0)} q^2 - \\ - \frac{4}{55} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-9} q^3,$$

$$C_6^{(0)} = 7 \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^6 J_6^{(0)} - \frac{4}{77} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-4} J_2^{(0)} q^2 + \frac{8}{231} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-9} q^3,$$

$$C_n^{(0)} = (n+1) \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^n J_n^{(0)}, \quad n = 3, 5; 7, 8, \dots, N,$$

$$C_2^{(1)} = 0, \quad D_2^{(1)} = 0,$$

$$\begin{matrix} C_2^{(2)} \\ D_2^{(2)} \end{matrix} = 3 \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^2 \begin{matrix} J_2^{(2)} \\ S_2^{(2)} \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} C_n^{(k)} \\ D_n^{(k)} \end{matrix} = (n+1) \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^n \begin{matrix} J_n^{(k)} \\ S_n^{(k)} \end{matrix}; \quad n = 3, 4, \dots, N, \quad k \neq 0.$$

Если в (8) подставить

$$(10) \quad \rho = \rho_{W_0} + H,$$

то получится  $g$  на земной поверхности в точке с высотой  $H$  над уровнем моря и геоцентрическими координатами  $\phi, \lambda$ .

Этим путем можно вычислить  $g$  и в гравиметрических пунктах, где  $g$  получено из наблюдений (обозначим  $g_{\text{набл.}}$ ).

Разности

$$(11) \quad \delta g = g - g_{\text{набл.}}$$

получатся значительными из-за того, что описание поля Стоксовыми постоянными детальными возмущениями практически не даст. Однако, осреднив разности (11) для достаточного количества гравиметрических пунктов, можно получить данные о точности

принятого исходного значения ускорения силы тяжести на Земле. С другой стороны, если это значение заранее надежно, то можно уточнить геоцентрическую постоянную. Все здесь зависит от того, которая величина точнее: исходное значение  $g$ , или же  $\frac{fM}{R_0^2}$ , принятая при вычислении  $g$  по спутниковым данным. В [ 7 ] были решены оба варианта. Разности (11) были составлены для более чем 4000 гравиметрических пунктов земной поверхности. Приняв

$$(12) \quad fM = 398\,601,3 \cdot 10^9 \text{ м}^3 \text{ сек}^{-2},$$

поправка  $\delta g_p$  Потсдамской системы получилась равной

$$(13) \quad \delta g_p = (-13,4 \pm 0,75) \text{ мгл}.$$

Наоборот, приняв <sup>более</sup> вероятное значение

$$(14) \quad \delta g_p = -13,9 \text{ мгл},$$

то получилось значение геоцентрической постоянной

$$(15) \quad fM = (398\,601,1 \pm 0,3) \cdot 10^9 \text{ м}^3 \text{ сек}^{-2}.$$

Полученные данные хорошо соответствуют данным, полученным по анализу динамики полета межконтинентальных станций Венера 1-7 и др. [ 13 ]. Их можно при применении этого метода, детальное описание которого дано в [ 7 ], еще уточнить, пользуясь более полной наземной гравиметрической информацией.

Если в (8) за  $\rho$  подставить радиус-вектор некоторой внешней уровенной поверхности (линейный масштабный фактор кото-



рой  $R_0$ ), то получится ускорение силы тяжести именно на ней. Если снять нормальное поле, то получатся аномалии ускорения силы тяжести в точках этой поверхности. Задавая нормальное поле первыми двумя гармониками, то получатся правые аномалии

$$(16) \quad \Delta g = \frac{fM}{R_0^2} \sum_{n=3}^N \sum_{k=0}^n (g_n^{(k)} \cos k\lambda + h_n^{(k)} \sin k\lambda) P_n^{(k)}(\sin\phi) .$$

Коэффициенты  $g_n^{(k)}$ ,  $h_n^{(k)}$  являются функциями Стоксовых постоянных Земли и равны

$$(17) \quad g_0^{(0)} = \frac{fM}{R_0^2} \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-3} q - \frac{3}{5} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-6} q^2 + \right. \\ \left. + \frac{4}{15} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-1} J_2^{(0)} q - \frac{2}{5} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^4 (J_2^{(0)})^2 \right] ,$$

$$g_2^{(0)} = \frac{fM}{R_0^2} \left[ \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^2 J_2^{(0)} + \frac{4}{3} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-3} q + \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-6} q^2 - \right. \\ \left. - \frac{8}{3} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-1} J_2^{(0)} q - \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^4 (J_2^{(0)})^2 \right] ,$$

$$g_4^{(0)} = \frac{fM}{R_0^2} \left[ 3 \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^4 J_4^{(0)} - \frac{2}{5} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-6} q^2 + \right. \\ \left. + \frac{12}{5} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-1} J_2^{(0)} q - \frac{18}{5} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^4 (J_2^{(0)})^2 \right] ,$$

$$g_n^{(0)} = \frac{fM}{R_o^2} (n-1) \left(\frac{a_o}{R_o}\right)^n J_n^{(0)}, \quad n = 3; 5, 6, \dots, N,$$

$$g_2^{(1)} = 0, \quad h_2^{(1)} = 0,$$

$$\begin{aligned} g_2^{(2)} &= \frac{fM}{R_o^2} \left(\frac{a_o}{R_o}\right)^2 J_2^{(2)}, \\ h_2^{(2)} &= \frac{fM}{R_o^2} \left(\frac{a_o}{R_o}\right)^2 S_2^{(2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_n^{(k)} &= \frac{fM}{R_o^2} (n-1) \left(\frac{a_o}{R_o}\right)^n J_n^{(k)}, \\ h_n^{(k)} &= \frac{fM}{R_o^2} (n-1) \left(\frac{a_o}{R_o}\right)^n S_n^{(k)}. \end{aligned}$$

Таким способом были вычислены по спутниковым данным аномалии силы тяжести на ряде внешних уровенных поверхностей, положение которых определялось значениями фактора  $R_o$ . Детальные данные содержатся в [7], где приведены и выражения для сферических функций в виде функций прямоугольных пространственных координат до 15-й степени включительно и для всех соответствующих порядков.

#### 4. УТОЧНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

Характеристики планетарного геоида, полученные по спутниковым данным, позволяют уже решать задачу об определении параметров общего земного эллипсоида. Если линейный масштабный фактор (3) считать надежно определенным, то задача сравни-

тельно легко решается по Стоксовым постоянным Земли следующих степеней  $n$  и порядков  $k$  :  $J_2^{(0)}$  ,  $J_2^{(2)}$  ,  $S_2^{(2)}$  ,  $J_4^{(0)}$  ,  $J_6^{(0)}$  ,  $J_4^{(2)}$  ,  $S_4^{(2)}$  ,  $J_4^{(4)}$  ,  $S_4^{(4)}$  . Некоторые тонкости связаны с неоднозначностью решения этой задачи из-за необходимости формулировки дополнительных условий. Однако, различия результатов, выванные применением разного вида условий, как будто бы не больше, чем  $10^{-7}$  .

Возникает интересный вопрос, как наземная геодезическая информация повлияет на спутниковые результаты.

В [ 6 ] были с использованием элементов отдельных геодезических референц-систем, выведенных в [ 1 - 5 ] , трансформированы астрономо-геодезические высоты геоида по всем континентам в общую геоцентрическую систему.

Параметры земного эллипсоида вращения, полученные по этим данным, равны [ 6 ]

$$a = 6\,378\,138 \text{ м} ,$$

$$\alpha = 1 : 298,220 .$$

Лишь по спутниковым данным и по значению линейного масштабного фактора, определенного комбинированным способом, получено

$$a = 6\,378\,139 \text{ м} ,$$

$$\alpha = 1 : 298,258 .$$

Таким образом можно заключить, что наземная астрономо-геодезическая информация в целом сказалась мало.

Однако, если вычислять параметры наиболее подходящих эллипсоидов по спутниковым или астрономо-геодезическим данным лишь на отдельных континентах, или же их частям, то получатся результаты уже значительно отличающиеся. Некоторые результаты даются в таблице 5 ; детальное описание содержится в [ 6 ] .



Таблица 5

Континент	Параметры местных эллипсоидов для отдельных континентов					Данные
	а	$\frac{1}{\alpha}$	$\Delta x_0$	$\Delta y_0$	$\Delta z_0$	
	[м]		[м]	[м]	[м]	
Европа	6 378 043	299,354	+131	- 34	+ 17	ИСЗ
	6 378 188	297,828	0	0	0	
	6 378 051	300,220	+164	- 44	- 64	Астр.-геод.
	6 378 215	297,225	0	0	0	
Азия	6 378 272	297,469	- 30	-153	- 49	ИСЗ
	6 378 114	298,540	0	0	0	
	6 378 303	294,899	- 26	-230	+111	Астр.-геод.
	6 378 100	298,726	0	0	0	
Северная Америка	6 378 221	298,955	+ 3	+ 72	-116	ИСЗ
	6 378 113	298,500	0	0	0	
	6 378 361	296,154	+ 26	+223	- 26	Астр.-геод.
	6 378 114	298,385	0	0	0	
Южная Америка	6 378 109	297,018	- 37	- 49	- 90	ИСЗ
	6 378 138	298,711	0	0	0	
	—					Астр.-геод.
Африка	6 378 060	300,111	+103	- 30	- 7	ИСЗ
	6 378 140	299,897	0	0	0	
	—					Астр.-геод.
Австралия	6 378 127	297,867	-118	- 22	+ 63	ИСЗ
	6 378 188	295,988	0	0	0	
	6 378 344	298,933	+ 8	-162	+217	Астр.-геод.
	6 378 175	296,758	0	0	0	

Литература

- [ 1 ] V. Vahala: Некоторые результаты трансформирования американской и европейской геодезических систем относительности. MNO, Praha 1971.
- [ 2 ] V. Vahala: Geodetické sítě malého rozsahu, jejich transformace a transformace světových referenčních geodetických systémů. Kand. disertační práce, Praha 1971.
- [ 3 ] V. Vahala: Světový referenční geodetický systém. 2. dílčí výzk. zpr. XXV-C-5, Praha 1972.
- [ 4 ] V. Vahala: Transformace světových referenčních geodetických systémů. Vojenský topografický obzor, MNO-17, 1 (1972).
- [ 5 ] V. Vahala: Světový referenční geodetický systém. 3. dílčí výzk. zpr. XXV-C-5, Praha 1973.
- [ 6 ] V. Vahala: K otázce parametrů referenčních elipsoidů a globální charakteristiky křivosti geoidu. Praha 1974 (**nezveřejněno**).
- [ 7 ] S. Kvasnička: Ověření korekce postupimského tíhového normálu a modelování tíhového pole Země. Kand. disertační práce, Praha 1972.
- [ 8 ] M. Burša: Fundamental Geodetic Parameters of the Earth's Figure and the Structure of the Earth's Gravity Field Derived from Satellite Data. *Studia geoph. et geod.*, 16 (1972), 10.
- [ 9 ] M. Burša: Potential of the Geoidal Surface, the Scale Factor for Length and Earth's Figure Parameters from Satellite Observations. *Studia geoph. et geod.*, 13 (1969), 337.

- [ 10 ] E.M. Gaposchkin, M.R. Williamson, Y. Kozai, G. Mendes:  
Smithsonian Institution Standard Earth III. Geopotential.  
SAO, 1973.
- [ 11 ] E.M. Gaposchkin, K. Lambeck: 1969 Smithsonian Standard  
Earth (II). SAO Spec. Rep. 315, 1970.
- [ 12 ] G. Veis: The Determination of the Radius of the Earth  
and Other Geodetic Parameters as Derived from Optical  
Satellite Data. SAO Spec. Rep. 264, 1967; Ass. IUGG,  
Lucerne 1967.
- [ 13 ] P.B. Esposito, S.K. Wong: Geocentric Gravitational  
Constant Determined from Mariner 9 Radio Tracking  
Data. (Jet Propulsion Laboratory, California Institute  
of Technology, Contract No NAS 7-100.) Int. symp.  
Earth Gravity Models, Saint Louis, Missouri USA.

**Došlo 13.9.1974**